



TITLE:

ネットワーク上の損耗ゲームにおける勢力集中効果モデル (確率的環境下における数理モデルの理論と応用)

AUTHOR(S):

宝崎, 隆祐

CITATION:

宝崎, 隆祐. ネットワーク上の損耗ゲームにおける勢力集中効果モデル (確率的環境下における数理モデルの理論と応用). 数理解析研究所講究録 2017, 2044: 120-130

ISSUE DATE:

2017-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/236988>

RIGHT:

ネットワーク上の損耗ゲームにおける勢力集中効果モデル

防衛大学校 宝崎 隆祐

Ryusuke Hohzaki

Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

ネットワーク構造を活動空間として攻撃側と守備側が対峙するモデルはネットワーク阻止モデル (NIM: Network Interdiction Model) と呼ばれ, 多くの軍事的, 社会的な問題解決に利用されている. NIM によって, グラフ・ネットワーク理論の一般的な拡張問題 [1] から, マルウェアからの通信ネットワーク防護 [2] や水道・電気といったインフラネット網の防護の問題 [3], ロジスティクス網の問題, テロに対する施設防御 [4] や密輸阻止の問題 [5], 感染症対策 [6] や危険な化学物質による汚染阻止の問題, 鉄道や道路といった公共輸送網の防護・設計問題 [7, 8] 等, 多くの具体的な適用例が考えられている.

NIM においては, 攻撃側, 守備側の衝突により何からの損耗現象が生じる場合が多い. そのことに着目し, NIM における損耗を明示的に考慮した損耗ゲームを一般的に論じたのが Hohzaki and Chiba [9] である. そこでは, 損耗モデルとして有名なランチェスターのモデルのうち, 対峙する両勢力の損耗量が比例関係にある 1 次則を組み込んでいる. 同じ損耗モデルの下で, 非対称な情報取得による損耗ゲームを Hohzaki and Sunaga [10] が論じている. ランチェスターの損耗モデルの中には, 両勢力の残存勢力が相手の残存勢力を狙うことにより勢力集中の効果を現出させる 2 次則モデルと呼ばれるものがある. 著者らはこの損耗モデルを使った損耗ゲームを Hohzaki and Higashio [11] において議論した. この報告書はその研究をレビューし, 勢力集中効果のある損耗ゲームにおける合理的な攻撃及び守備戦略を考察することを目的とする.

2 2 次則損耗モデルをもつゲーム

閉路を持たない有向グラフ上での, 攻撃側, 守備側の同時手番の損耗ゲームを次のようにモデル化する. アーク上での攻撃側と守備側との損耗モデルとしてランチェスターの 2 次則モデルを仮定する.

- (A1) ノード集合 N と有向アーク集合 A から成る閉路を持たない有向グラフ $G(N, A)$ を損耗空間とする.
- (A2) プレイヤーは攻撃側及び守備側の 2 人である. 攻撃側は, 出発ノード s から初期勢力量 R_0 で侵入し, 目的ノード t へ移動しようとする. 一方, 守備側はアーク上に初期量 B_0 の勢力量を分割・配備し, 攻撃側の侵攻を阻止しようとする.

- (A3) アーク $e \in \mathbf{A}$ 上での勢力量 x の攻撃側と勢力量 y の守備側との衝突により、ランチェスターの2次則モデルによる損耗が生じ、どちらかが全滅するまで衝突は終了しない。2次則モデルによる攻撃側の残存量 $f_e(x, y)$ は次式で与えられる。

$$f_e(x, y)^2 = \max\{0, x^2 - \gamma_e y^2\} \quad (1)$$

係数 γ_e は、アーク e における守備側の戦力交換比と呼ばれる。

- (A4) 両プレイヤーはゲームの途中で一切の情報を得ることはなく、ゲームの始めに意思決定を行う。
- (A5) 両プレイヤーにとっての興味は、目的ノードに到達する攻撃側の残存量であり、攻撃側をそれを最大にしようとし、守備側はそれをできるだけ小さくすることを目的とする。

(1) 式で表される損耗モデルの括弧内 $\{ \}$ の第1項は侵入側の全滅を意味し、第2項は守備側を全滅させた後の攻撃側の残存量を表している。出発ノードから次々とアークを移動してゆく攻撃側の残存量に関しては、次の予備定理が成り立つ。

予備定理 1 出発ノードから目的ノードまでのパス l の構成アークを $\{e_1, \dots, e_m\}$ とし、アーク e_j には守備勢力 y_{e_j} が配備されている。パス l 上を量 X の攻撃者が通過する場合、アーク e_t を通過し終わった直後に観測できる残存量 z_t の自乗は、次式で与えられる。

$$(z_t)^2 = \max \left\{ 0, X^2 - \sum_{j=1}^t \gamma_{e_j} y_{e_j}^2 \right\} \quad (2)$$

証明: 省略。

評価式 (2) から分かるように、攻撃側にとっては、勢力を分けずに全勢力による移動が有利である。したがって、攻撃側は全勢力が同じ経路をとって移動することを以後仮定する。

3 均衡解の存在に関する考察

2次則損耗モデルをもつゲームでは、純粋戦略の範囲内で守備側の均衡解が無いことが次の反例により証明できる。この性質は、1次則損耗モデルのゲーム [9, 10] ではなかった特徴である。

図1のような出発ノード s と目的ノード t の2つのノードと、その間に平行して走る2つのアーク1, 2から成るネットワークがある。攻撃側、守備側の初期勢力量をそれぞれ R_0, B_0 とし、アーク1, 2上での戦力交換比を γ_1, γ_2 とする。ここでアーク1を通る経路と2を通る経路の攻撃側の選択確率を π_1, π_2 とし、両アークへの守備側の配備量を y_1, y_2 で表す。各戦略は、 $\pi_1 + \pi_2 = 1$ 及び $y_1 + y_2 = B_0$ を満たす。目的ノード t に到達する攻撃側の残存勢力量の2乗をゲームの支払とすると、期待支払は次式で与えられる。

$$f(\pi, y) = \pi_1 \max\{0, R_0^2 - \gamma_1 y_1^2\} + \pi_2 \max\{0, R_0^2 - \gamma_2 y_2^2\}$$

この特殊例では、守備側勢力は少なく、攻撃側を全滅させることのできない次の条件を仮定する。

$$R_0^2 - \gamma_1 B_0^2 \geq 0, \quad R_0^2 - \gamma_2 B_0^2 \geq 0$$

かくして期待支払は簡単な次式となり，これに対するミニマックス値とマックスミニ値が一致するか否かを検証することで，均衡解の有無が調べられる．

$$f(\pi, \mathbf{y}) = \pi_1(R_0^2 - \gamma_1 y_1^2) + \pi_2(R_0^2 - \gamma_2 y_2^2)$$

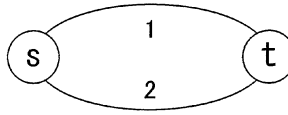


図1 簡単な反例

その途中経過は省略して結果だけ示すと，ミニマックス値とマックスミニ値はそれぞれ次のようになり，両者は一致しない．

$$\min_y \max_\pi f(\pi, \mathbf{y}) = R_0^2 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\sqrt{\gamma_1} + \sqrt{\gamma_2})^2} B_0^2, \quad \max_\pi \min_y f(\pi, \mathbf{y}) = R_0^2 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} B_0^2$$

4 均衡解の導出

上の具体例から，均衡解導出のためには，攻撃側，守備側双方に対し混合戦略を考える必要のあることが明らかになった．以下では，均衡解導出のため，攻撃側，守備側の戦略を定義し支払関数を求めよう．

出発ノード s から目的ノード t までの全パス群を Ω とし，攻撃側の混合戦略であるパス選択確率を $\pi = \{\pi(l), l \in \Omega\}$ で，守備側の勢力配備を $\mathbf{y} = \{y_e, e \in \mathbf{A}\}$ で表す． π は実行可能領域 $\Pi \equiv \{\pi | \sum_{l \in \Omega} \pi(l) = 1, \pi(l) \geq 0, l \in \Omega\}$ をもつ． y_e はアーク e への守備配備量であり，実行可能領域 $\Psi \equiv \{\mathbf{y} | \sum_{e \in \mathbf{A}} y_e \leq B_0, y_e \geq 0, e \in \mathbf{A}\}$ をもつ．この連続変数の混合戦略として配備 \mathbf{y} の確率密度関数 $g(\mathbf{y})$ を考えると，その実行可能領域は $G \equiv \left\{ g(\mathbf{y}) \left| \int_{\mathbf{y} \in \Psi} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1, g(\mathbf{y}) \geq 0, \mathbf{y} \in \Psi \right. \right\}$ で表される．

以上の記号と (2) 式を用いれば，攻撃側，守備側の純粋戦略 $l \in \Omega$ と $\mathbf{y} \in \Psi$ による攻撃側残存量の2乗 $R^+(l, \mathbf{y})$ 及びその π による期待値 $R^+(\pi, \mathbf{y})$ として次式を得る．

$$R^+(l, \mathbf{y}) = \max \left\{ 0, R_0^2 - \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \right\},$$

$$R^+(\pi, \mathbf{y}) = \sum_{l \in \Omega} \pi(l) \max \left\{ 0, R_0^2 - \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \right\} = R_0^2 - \sum_{l \in \Omega} \pi(l) \min \left\{ R_0^2, \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \right\} \quad (3)$$

ここで，損耗量を表す (3) 式右辺最終式の2項目を

$$A^+(\pi, \mathbf{y}) \equiv \sum_{l \in \Omega} \pi(l) \min \left\{ R_0^2, \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \right\} \quad (4)$$

とおく．このとき $R_0^2 < \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2$ は，攻撃側を全滅させる以上の損耗を発生させようとする配備となっていることを示しており，これをオーバーキルと呼称する．もちろん，攻撃勢力以上の

損耗は発生するはずもなく、オーバーキルは守備側資源の無駄な使用を意味する。上式から、さらに守備側混合戦略 $g(\mathbf{y})$ による攻撃側残存量の 2 乗の期待値は次式となる。

$$R^+(\pi, g) = \int_{\Psi} R^+(\pi, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = R_0^2 - \int_{\Psi} A^+(\pi, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

以下では攻撃側残存量の 2 乗の期待値ではなく、2 乗損耗量の期待値と呼ぶべき上式の第 2 項目を $A^+(\pi, g)$ とおいて、これをゲームの支払関数として以降の議論の対象とする。

4.1 マックスミニ値の下界評価

ここでは、期待支払 $R^+(\pi, g)$ のマックスミニ最適化、すなわち $A^+(\pi, g)$ のミニマックス問題を考える。その最大化は

$$\max_{g \in G} A^+(\pi, g) = \max_{g \in G} \int_{\Psi} A^+(\pi, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \max_{\mathbf{y} \in \Psi} A^+(\pi, \mathbf{y})$$

と書ける。最後の変形は $\mathbf{y}^* = \arg \max_{\mathbf{y} \in \Psi} A^+(\pi, \mathbf{y})$ なる \mathbf{y}^* に対し、デルタ関数 $\delta(\cdot)$ を使った関数 $g(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)$ により実現できる。ところで、

$$\max_{\mathbf{y} \in \Psi} A^+(\pi, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y} \in \Psi} \sum_{l \in \Omega} \pi(l) \min \left\{ R_0^2, \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \right\}$$

であるから、あるパス l に対し $\sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 > R_0^2$ となるようであれば、パス l の守備量を $\sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 = R_0^2$ となるように抑制し、余った守備資源を他のパスの守備に回した方がよい。したがって、最適な \mathbf{y} では、条件 $C \equiv \{\mathbf{y} | \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \leq R_0^2, l \in \Omega\}$ を付け加えてもよい。このことは、上式に対する次のような更なる変形を許す。

$$\max_{\mathbf{y} \in \Psi} A^+(\pi, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y} \in \Psi^+} \sum_{l \in \Omega} \pi(l) \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 = \max_{\mathbf{y} \in \Psi^+} A(\pi, \mathbf{y})$$

ただし、 $\Psi^+ \equiv \{\mathbf{y} \in \Psi | \mathbf{y} \in C\}$ 及び

$$A(\pi, \mathbf{y}) \equiv \sum_{l \in \Omega} \pi(l) \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \quad (5)$$

とおいた。条件 C の代わりに、これを緩和した条件 $\sum_l \pi(l) \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \leq R_0^2$ を使うと次式が成り立つ。

$$\max_{\mathbf{y} \in \Psi^+} A(\pi, \mathbf{y}) \leq \min \left\{ R_0^2, \max_{\mathbf{y} \in \Psi} A(\pi, \mathbf{y}) \right\} \quad (6)$$

いま、(5) 式の \sum_l 及び \sum_e の順序を入れ換えると

$$A(\pi, \mathbf{y}) = \sum_{e \in A} \sum_{l \in \Omega_e} \pi(l) \gamma_e y_e^2$$

と書けることから、

$$\max_{\mathbf{y} \in \Psi} A(\pi, \mathbf{y}) = B_0^2 \max_{e \in A} \gamma_e \sum_{l \in \Omega_e} \pi(l) \quad (7)$$

を得る。ただし、アーク e を通過するパス全体を $\Omega_e \equiv \{l \in \Omega | e \in E_l\}$ で表した。(6) 式をさらに π について最小化すれば、

$$\min_{\pi \in \Pi} \max_{y \in \Psi^+} A(\pi, y) \leq \min \left\{ R_0^2, \min_{\pi \in \Pi} \max_{y \in \Psi} A(\pi, y) \right\} = \min \left\{ R_0^2, \min_{\pi \in \Pi} B_0^2 \max_{e \in A} \gamma_e \sum_{l \in \Omega_e} \pi(l) \right\}$$

を得るが、上式の $\{ \}$ 内の第 2 項の最適値は、次の問題の最適値 v^* に B_0^2 を掛けることにより得られる。

$$\begin{aligned} (P_R): \quad & \min_{\pi, v} v \\ \text{s.t.} \quad & \gamma_e \sum_{l \in \Omega_e} \pi(l) \leq v, \quad e \in A, \\ & \sum_{l \in \Omega} \pi(l) = 1, \quad \pi(l) \geq 0, \quad l \in \Omega. \end{aligned} \tag{8}$$

したがって、 $A^+(\pi, y)$ のミニマックス値は上界 $\min\{R_0^2, v^* B_0^2\}$ をもち、 $R^+(\pi, g)$ のマックスミニ値は $\max\{0, R_0^2 - v^* B_0^2\}$ を下界にもつ。

4.2 均衡解導出の数値解法アルゴリズム

守備側の最適混合戦略として連続関数 $g(y)$ を取り扱わなければならないが、実際の最適混合戦略は有限数の純粋戦略の混合戦略として得られる場合のあることを、以下の定理で述べる。

定理 1 問題 (P_R) による最適解 π^* と最適値 v^* に対し、 $E^* \equiv \{e \in A | \gamma_e \sum_{l \in \Omega_e} \pi^*(l) = v^*\}$ を定義する。任意の $e \in E^*$ に対し $\gamma_e B_0^2 \leq R_0^2$ ならば、均衡解は、守備側の次の $|\Omega|$ 本の純粋戦略 $\{\hat{y}(p), p \in \Omega\}$ と攻撃側の $|\Omega|$ 本の純粋戦略 $l \in \Omega$ による行列ゲームの均衡解として得られる。 $\hat{y}(p)$ は、パス p に対しパス上の $\hat{a}(p) \equiv \arg \max_{e \in E_p} \gamma_e \sum_{l \in \Omega_e} \pi^*(l)$ なる 1 つのアーク $\hat{a}(p)$ に全量 B_0 を配備し、その他のアークには配備量をゼロとする純粋戦略である。このとき、攻撃側の最適戦略は π^* で、攻撃側残存量の 2 乗の期待値（ゲームの値）は $R_0^2 - B_0^2 v^*$ で、攻撃側損耗量の 2 乗の期待値は $B_0^2 v^*$ で得られる。

証明: この場合 $\min_{\pi \in \Pi} \max_{y \in \Psi} A^+(\pi, y) = \min_{\pi \in \Pi} \max_{y \in \Psi} A(\pi, y)$ が成り立ち、問題 (P_R) が攻撃側消耗量のミニマックス値を与える。定理の行列ゲームにおいて、守備側戦略 $\hat{y}(p)$ と攻撃側パス l による支払は $\sum_{e \in E_l} \gamma_e B_0^2 \delta_{e\hat{a}(p)}$ となる。ただし、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。ゆえに、この支払行列によるミニマックス最適化問題の最適混合戦略 $\pi(l)$ は次の問題により与えられる。

$$(M): \quad \min w \quad \text{s.t.} \quad \sum_{l \in \Omega} \pi(l) \sum_{e \in E_l} \gamma_e B_0^2 \delta_{e\hat{a}(p)} \leq w, \quad p \in \Omega, \quad \sum_{l \in \Omega} \pi(l) = 1, \quad \pi(l) \geq 0, \quad l \in \Omega.$$

第 1 の制約式は、

$$B_0^2 \gamma_{\hat{a}(p)} \sum_{l \in \Omega_{\hat{a}(p)}} \pi(l) \leq w, \quad p \in \Omega \tag{9}$$

と変形できるが、これから $e \in E_p$ なる任意の e に関して

$$\gamma_e \sum_{l \in \Omega_e} \pi(l) \leq \gamma_{\hat{a}(p)} \sum_{l \in \Omega_{\hat{a}(p)}} \pi(l) \leq w / B_0^2$$

が成り立つ。また、どのパス $p \in \Omega$ にも含まれないアーク e に関しては $\gamma_e \sum_{l \in \Omega_e} \pi(l) = 0$ であるから、問題 (M) の第1の制約条件から (8) 式を導くことができる。逆に、(8) 式から (9) 式の導出は容易であるから、問題 (P_R) と (M) は同値である。もちろん、両者の最適値 v^* と w^* の間には $w^* = B_0^2 v^*$ の関係がある。

次に、守備側の最適戦略として $|\Omega|$ 個の純粋戦略 $\{\hat{\mathbf{y}}(p), p \in \Omega\}$ のみを考えればよいことも、次のように容易に確認できる。この純粋戦略で作成できるすべての混合戦略の集合を \hat{G} とする。 $\hat{G} \subseteq G$ であるから、ここでの支払に関する最適値について $\min_{\pi} \max_{g \in G} \geq \max_{g \in G} \min_{\pi} \geq \max_{g \in \hat{G}} \min_{\pi}$ が成り立つが、行列ゲームの値すなわち $\max_{g \in \hat{G}} \min_{\pi}$ の値が、問題 (P_R) の最適値すなわち $\min_{\pi} \max_{g \in G}$ の値と一致することから、 $\min_{\pi} \max_{g \in G} = \max_{g \in G} \min_{\pi} = \max_{g \in \hat{G}} \min_{\pi}$ が証明できる。 \square

定理1の条件が成り立っているとき、守備側戦略 $\hat{\mathbf{y}}(l)$ の最適選択確率 $\rho^*(l)$ が、行列ゲームのマクスマニ戦略として次の問題から得られる。

$$(P_B): \max z \quad \text{s.t.} \quad \sum_{p \in \Omega} \rho(p) \sum_{e \in E_l} \gamma_e \delta_{e\hat{\mathbf{a}}(p)} \geq z, \quad l \in \Omega, \quad \sum_{p \in \Omega} \rho(p) = 1, \quad \rho(p) \geq 0, \quad p \in \Omega.$$

また、問題 (P_B) の最適値 z^* を用いて、支払 $A^+(l, \mathbf{y})$ のゲームの値は $z^* B_0^2$ で、支払 $R^+(l, \mathbf{y})$ のゲームの値は、 $R_0^2 - z^* B_0^2$ により計算できる。最後に、異なるパス $p, p' \in \Omega$ に対し $\hat{\mathbf{a}}(p) = \hat{\mathbf{a}}(p')$ となり、対応する純粋戦略 $\hat{\mathbf{y}}(p)$ と $\hat{\mathbf{y}}(p')$ が同じになる場合もあることは注意を要する。この場合は、これらの一致する純粋戦略を1つにした行列ゲームを解いてもよいし、大きさ $|\Omega| \times |\Omega|$ の支払行列のままで均衡解を求め、和 $\rho^*(p) + \rho^*(p')$ を戦略 $\hat{\mathbf{y}}(p)$ の最適選択確率としてもよい。

上記の純粋戦略 $\hat{\mathbf{y}}(p)$ は、目標戦略 π に対抗し、各パス $p \in \Omega$ 上で守備側にとって最も重要となるアークに資源を集中する純粋戦略であり、それらの凸結合、すなわち混合戦略により期待損耗量を大きくしようと期待して支払行列が作られる。そこで、定理1の条件が成り立たない場合、すなわち $\gamma_e B_0^2 > R_0^2$ となる $e \in E^*$ が存在する場合には、定理1の拡張として、純粋戦略を作成する次のようなアルゴリズムが考えられる。

各パス $p \in \Omega$ に対し、(i) $\gamma_{\hat{\mathbf{a}}(p)} B_0^2 \leq R_0^2$ ならば、定理1の $\hat{\mathbf{y}}(p)$ を p の純粋戦略 $\tilde{\mathbf{y}}(p)$ として採用する。(ii) $\gamma_{\hat{\mathbf{a}}(p)} B_0^2 > R_0^2$ ならば、

$$\begin{aligned} (E_p(\pi)): \quad & \max \sum_{e \in A} \gamma_e y_e^2 \left(\sum_{l \in \Omega_e} \pi(l) \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in E_p} \gamma_e y_e^2 = R_0^2, \\ & \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \leq R_0^2, \quad l \in \Omega \setminus \{p\}, \\ & \sum_{e \in A} y_e = B_0, \quad y_e \geq 0, \quad e \in A. \end{aligned} \tag{10}$$

の解を $\tilde{\mathbf{y}}(p)$ として採用する。

この問題は、本来の定式化 $\max_{\mathbf{y} \in \Psi} A(\pi, \mathbf{y})$ にパス p に対する守備重視の制約 (10) 式を加えたものである。問題 $\max_{\mathbf{y} \in \Psi} A(\pi, \mathbf{y})$ の実行可能領域は凸集合であり、目的関数は凸であるから、その最大化問題の最適解は端点に現れる。定式化 $E_p(\pi)$ は、その端点をパス p への守備に重点をおく等式制約式 (10) 上で見つけようとするものである。単純にこの凸最大化問題の最適解だけを守備側の純粋戦略としては、行列ゲームを解く際に作る守備側の混合戦略の多様性が保てないこと

が懸念されるからである．もちろん，定理 1 の証明とは異なり，純粋戦略を作成する際に使用する問題 (P_R) の最適解 π^* と行列ゲームを解いた結果得られる最適なパス選択 π とが一致する保証はないから，一致するまで以上のプロセスを繰り返すことになる．その際，同じく純粋戦略の多様性を確保するために，途中で作成された純粋戦略がそれまでのものと異なれば，より良い混合戦略を作るための選択肢としてそれらを付け加えてゆく．以上から，均衡解を求める数値計算アルゴリズムは次のようになる．

アルゴリズム $\Lambda(\Omega, R_0^2, B_0^2)$

(S1) 問題 (P_R) を解き，攻撃側の最適戦略 π^* を求める．守備側が考慮する純粋戦略の候補集合を $Y = \emptyset$ とおく．

(S2) π^* を使い， $\{\hat{a}(p), p \in \Omega\}$ を求める．各 $p \in \Omega$ に対し，

(i) $\gamma_{\hat{a}(p)} B_0^2 \leq R_0^2$ ならば， $\tilde{y}(p) = \hat{y}(p)$ とする．

(ii) $\gamma_{\hat{a}(p)} B_0^2 > R_0^2$ ならば，問題 $(E_p(\pi^*))$ を解いて $\tilde{y}(p)$ を得る．

以上の純粋戦略を守備側の純粋戦略として取り込み， $Y = Y \cup \left(\bigcup_{p \in \Omega} \tilde{y}(p) \right)$ とする．

(S3) 守備側純粋戦略 $\tilde{y}(p) \in Y$ と攻撃側純粋戦略 $l \in \Omega$ に対する支払を $\sum_{e \in E_l} \gamma_e \tilde{y}(p)_e^2$ とするサイズ $|Y| \times |\Omega|$ の支払行列をもつ行列ゲームを解き，守備側の最適混合戦略 $\{\rho(y), y \in Y\}$ と攻撃側の最適混合戦略 $\{\tilde{\pi}(l), l \in \Omega\}$ を求める．

もし $\tilde{\pi} = \pi^*$ ならば終了する．そのときの行列ゲームの値が自乗損耗量の期待値であり， R_0^2 から引いた値が攻撃残存量の自乗の期待値である．また π^* が攻撃側の最適パス選択， ρ^* が最適守備戦略である．

そうでなければ， $\pi^* = \tilde{\pi}$ において，(S2) に戻る．

4.3 守備側の有望な純粋戦略の生成

ここでは凸最大化問題 $\max_{y \in \Psi} A(\pi, y)$ を解き，最適な守備側の純粋戦略を求める数値アルゴリズムを提示する．この数値解法は，凸最大化問題に対する一般的な手法である Outer approximation algorithm [12] を適用したものである．この最適解を，4.2 節の均衡解導出のアルゴリズムで作成する行列ゲームを構成するための守備側純粋戦略の 1 つとして使用することもできる．まずこの問題を明示しよう．

$$\max \sum_{e \in A} \gamma_e y_e^2 \left(\sum_{l \in \Omega} \pi(l) \right) \quad s.t. \quad \sum_{e \in E_l} \gamma_e y_e^2 \leq R_0^2 \quad (l \in \Omega), \quad \sum_{e \in A} y_e \leq B_0, \quad y_e \geq 0 \quad (e \in A).$$

表示をさらに単純化するため， $y = \{y_e\}$ の代わりに $\delta = \{\delta_e \equiv \sqrt{\gamma_e} y_e / R_0\}$ ，さらには $c_e \equiv \sum_{l \in \Omega} \pi(l)$ ， $D_0 \equiv B_0 / R_0$ を用いると次式となる．

$$\max \sum_{e \in A} c_e \delta_e^2 \quad s.t. \quad \sum_{e \in E_l} \delta_e^2 - 1 \leq 0 \quad (l \in \Omega), \quad \sum_{e \in A} \frac{\delta_e}{\sqrt{\gamma_e}} - D_0 \leq 0, \quad \delta_e \geq 0 \quad (e \in A).$$

目的関数を $r(\delta) = R_0^2 \sum_{e \in A} c_e \delta_e^2$ で、制約式の第1式左辺を関数 $f_l(\delta) = \sum_{e \in E_l} \delta_e^2 - 1$ で、第2式左辺を関数 $f_0(\delta) = \sum_{e \in A} \delta_e / \sqrt{\gamma_e} - D_0$ として議論を進める。問題は凸である実行可能領域 D における凸最大化問題であるから最適解は端点に現れるが、関数 $f_l(\delta)$ が線形でないため、 $f_0(\delta) \leq 0$ と δ の非負制約から形成される Polytope P の $|A| + 1$ 個の頂点 (vertex) から、その実行可能性と最適性を試す。それが不調に終わった場合は、以後超平面にカットを入れて実行可能領域でない部分を排除することで、 P を小さな Polytope に更新し、その頂点へと実行可能性と最適性のチェックを継続してゆき、両条件が満たされた時点でアルゴリズムは終了する。

$|A| = m$ とすると、初期の単体 P_0 の端点群 $V(P_0)$ として、原点 $\mathbf{a}_0 = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^m$ のほか、 e 要素のみ正の値をもつ $\mathbf{a}_e = (0, \dots, \sqrt{\gamma_e} D_0, 0, \dots) \in \mathbf{R}^m$ ($e \in A$) が羅列される。アルゴリズムの途中で作成された Polytope P の頂点 $\mathbf{a} \in V(P)$ の中で目的関数 $r(\mathbf{a})$ を最大にする頂点 \mathbf{a}^* が、すべての $l \in \Omega$ に対し $f_l(\mathbf{a}^*) \leq 0$ となれば、実行可能性も満たしているから、 \mathbf{a}^* が最適解となる。そうでない場合は、次のようなカット $h(\mathbf{x}) = 0$ を作成する。 $h(\mathbf{x})$ は $f(\mathbf{a}^*) = \max_{l \in \Omega} f_l(\mathbf{a})$ に対する劣勾配ベクトル $\mathbf{p} \in \partial f(\mathbf{a}^*)$ を用いて $h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}^*) + f(\mathbf{a}^*)$ により定義される。このとき $\mathbf{x} = \mathbf{a}^*$ に対しては明らかに $h(\mathbf{a}^*) > 0$ となるが、任意の実行可能解 $\mathbf{x} \in D$ に対しては $h(\mathbf{x}) \leq 0$ となることが分かっている [12]。したがって、超平面 $h(\mathbf{x}) = 0$ によって \mathbf{a}^* を含んだ領域を現在の Polytope P からカットすることで、実行可能領域 D を含むより小さな Polytope に更新できる。カットにより作成される新しい Polytope P の頂点は、2つの隣接する頂点 \mathbf{u} と \mathbf{v} が $h(\mathbf{u}) < 0$ かつ $h(\mathbf{v}) > 0$ である場合に、両端点を結ぶ直線と $h(\mathbf{x}) = 0$ との交点にできる。以上の手順を実現する具体的なアルゴリズムは以下のとおりである。

(V1) (初期設定) 単体 P_0 に対する $m+1$ 個の頂点 \mathbf{a}_0 及び $\{\mathbf{a}_e, e \in A\}$ を作り、頂点群 $V(P_0)$ とする。さらに各頂点 $\mathbf{a} \in V(P_0)$ に対する隣接頂点群を $N(\mathbf{a}) = V(P_0) \setminus \{\mathbf{a}\}$ とする。 $P = P_0$ とする。

(V2) $r(\mathbf{a}^*) = \max_{\mathbf{a} \in V(P)} r(\mathbf{a})$ なる \mathbf{a}^* を求める。もしすべての $l \in \Omega$ に対し $f_l(\mathbf{a}^*) \leq 0$ ならば、 \mathbf{a}^* が最適解であり、終了する。

そうでなければ、 $F \equiv \max_{l \in \Omega} f_l(\mathbf{a}^*) > 0$ に対し $J \equiv \{l \in \Omega | f_l(\mathbf{a}^*) = F\}$ を作り、ある劣勾配ベクトル $\mathbf{p} = \sum_{l \in J} \lambda_l \nabla f_l(\mathbf{a}^*)$ ($\sum_{l \in J} \lambda_l = 1, \lambda_l \geq 0, l \in J$) を作成する。これを用いた超平面 $h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}^*) + F = 0$ をカットとし、次により頂点を更新する。

(V3) 頂点 $\mathbf{a} \in V(P)$ を $V^- = \{\mathbf{a} \in V(P) | h(\mathbf{a}) < 0\}$ と $V^+ = \{\mathbf{a} \in V(P) | h(\mathbf{a}) > 0\}$ により区分し、次により更新する。

すべての $\mathbf{u} \in V^-$ と各 $\mathbf{v} \in V^+ \cap N(\mathbf{u})$ に対し、 $\alpha = h(\mathbf{v}) / (h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}))$ から新しい頂点 $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + (1 - \alpha) \mathbf{v}$ を求め、次の更新作業を実施する。

$$N(\mathbf{u}) = N(\mathbf{u}) \setminus \{\mathbf{v}\} \cup \{\mathbf{w}\}, \quad N(\mathbf{w}) = \{\mathbf{u}\}, \quad V(P) = V(P) \setminus \{\mathbf{v}\} \cup \{\mathbf{w}\}$$

(V4) 以上によって、新たな Polytope $P = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m | h(\mathbf{x}) \leq 0\}$ に対する頂点の更新が終了したので、(V2)に戻る。

5 数値例

図2のように5つのノード N と7本のアーク A のあるネットワーク $G(N, A)$ 上での損耗ゲームを考える. それぞれのアーク e の横には丸で囲んだアーク番号とその後に戦力交換比 γ_e を記している. 総量 $R_0 = 10$ の攻撃側は, ノード1から5へ向かって侵入しようとし, 守備側は総勢力 $B_0 = 10$ をアーク上に配備しその阻止を図ろうとしている. 出発ノード1から目的ノード5までの4本の侵入経路 $l = 1, \dots, 4$ は, $E_1 = \{1, 3\}$, $E_2 = \{1, 4, 7\}$, $E_3 = \{2, 5, 7\}$, $E_4 = \{2, 6\}$ のアークで構成される..

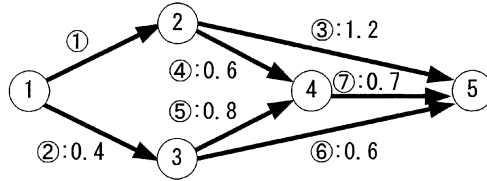


図2 損耗ネットワーク

今, アーク1の戦力交換比 γ_1 を0.4から1.2まで0.1ごとに变化させてみた. 表1には, 均衡解による到着ノード5での攻撃側残存量の自乗の期待値 $E_1[R^2]$ と, このネットワーク全体で2次則 $R_0^2 - \hat{\gamma}B_0^2 = E_1[R^2]$ が成立すると考えた場合の総合戦力交換比 $\hat{\gamma}$, 攻撃側の最適なパス選択確率 $\{\pi^*(l), l \in \Omega\}$ を記した. その後ろにパス $p \in \{\#1, \dots, \#4\}$ に対する純粋戦略 $\tilde{y}(p)$ で正の守備量が配備されるアークを大きな投入量ほど前に書いている. もし1つのアーク e しか書かれていなければ, $\tilde{y}(p)_e = B_0$ ということになる. 図3, 4は, 横軸に γ_1 をとって $E_1[R^2]$ 及び総合交換比を図にしたものである. これらの表, 図から, 均衡解は γ_1 の3つの区間 $[0.4, 0.7]$, $[0.7, 1]$, $[1, 1.2]$ で次のような異なる特徴を示す.

- (1) γ_1 が0.6以下であれば, アーク3の戦力交換比が大きく, 同じく比較的大きな交換比をもつアーク7がパス1, 2の集まる位置であることの重要性から, アーク1は守備側にとって重要ではない. したがって, γ_1 の増加は均衡解に何ら影響を及ぼさず, 残存量も変わらない.
- (2) γ_1 が0.7~1.0の間では, パス1, 2が通過するアーク1の位置の重要性と交換比の増加が影響を与え始める. すなわち, パス2を守備する役割が当初アーク7にあったものが, アーク1へと移ってくる. 同時に, パス1に対する守備の役割も担うようになる. このアーク7の重要性の低下により, 当初このアークが受け持っていたパス3に対するカバーを他のアークに委譲することになるが, それがアーク2の新たな重視性を生むことになる. したがって, 主にアーク1と2へ守備資源を配備する純粋戦略が使用される. また, γ_1 の増加とともに残存量も減少する.

アーク1が影響を与え始めると, その交換比の増大とともにここを通過するパス1, 2に対する目標の選択確率は減少する. $\gamma_1 = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ に対し, 目標側のパス1, 2の選択確率の和は, 0.364, 0.333, 0.308, 0.286と減少してゆく. ただしパス1, 2のどちらもアーク1を共通して通過し, かつ通過アークの中ではここにしか守備量はないから, パス1, 2の個々の選択確率でなく, その和のみに意味がある.

- (3) γ_1 が 1.0 より大きくなると、アーク 1 に投入する必要のある守備量の上限量 $\sqrt{R_0^2/\gamma_1}$ は守備側の手持ち量 $B_0 = 10$ より小さくなるため、その一部は他のアーク 2 での守備に回されるようになる。したがって、アーク 1 での消耗量は上げ止まり、アーク 2 への守備量の効果による極めて小さな消耗に変わる。また、 $\gamma_1 = 1.0, 1.1, 1.2$ に対しパス 1, 2 を目標が回避する度合いとしての両パスの選択確率の和は 0.286, 0.285, 0.284 と若干下がっていくものの、1 以下の γ_1 の場合に比べるとほとんど変化のない状態となる。

表 1 アーク 1 の交換比に対する均衡解の変化

γ_1	$E_1[R^2]$	総合交換比	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(4)$	#1	#2	#3	#4
0.4	75.54	0.2446	0.243	0.175	0.175	0.408	3, 6	7	7	6
0.5	75.54	0.2446	0.243	0.175	0.175	0.408	3, 6	7	7	6
0.6	75.54	0.2446	0.243	0.175	0.175	0.408	3, 6	7	7	6
0.7	74.65	0.2535	0.249	0.115	0.230	0.406	3, 2	7	2	6
0.8	73.33	0.2667	0.167	0.167	0.333	0.333	1	1	2	2
0.9	72.31	0.2769	0.154	0.154	0.346	0.346	1	1	2	2
1.0	71.43	0.2857	0.143	0.143	0.357	0.357	1	1	2	2
1.1	71.41	0.2859	0.248	0.037	0.327	0.388	1, 2	1, 2	2	2
1.2	71.37	0.2863	0.242	0.042	0.317	0.399	1, 2	1, 2	2	2

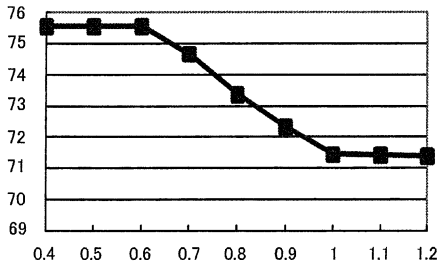


図 3 γ_1 に対する $E_1[R^2]$ の変化

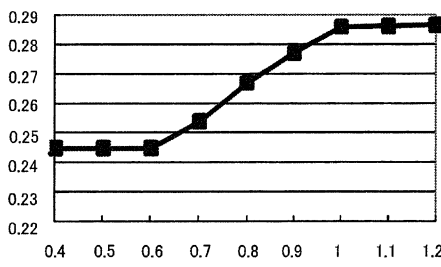


図 4 γ_1 に対する総合交換比の変化

6 おわりに

この論文は、損耗現象のあるネットワーク阻止モデル (NIM) を議論している。特に、損耗モデルを明示的に取り扱っていることがこの研究の新規性である。損耗モデルとしては、両プレイヤーの損耗に比例関係のあるモデル（ランチェスターの 1 次則）が基本的であると思われるが、現実問題への適用のためには非線形化は避けては通れず、この論文では勢力の集中効果があるランチェスターの 2 次則モデルを採用して、攻撃側、守備側の合理的な戦略について分析した。その結果、連続戦略である守備側戦略に混合戦略を考慮しなければならないという戦略立案上の困難性が存在することが明らかになった。また、勢力集中効果のある損耗モデルは、攻撃側には全勢力一体の移動の重要性を、守備側には損耗効率の良いアークへの集中配備の重要性を与えることが、解析的な分析からも、数値例による感度分析からも明らかになった。

この報告では、攻撃側、守備側ともにプレイの途中で情報が取得できない同時手番ゲームのみを議論したが、情報取得のある場合の多段階ゲームとの比較により、損耗ゲームにおける情報の価値分析が可能となる。

参考文献

- [1] R.D. Wollmer: Removing arcs from a network, *Operations Research* **12**, pp.934–940, 1964.
- [2] M. Kodialam and T.V. Lakshman: Detecting network intrusions via sampling: a game theoretical approach, Proceedings of the 22nd Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications (IEEE INFOCOM), **3**, pp.1880–1889, 2003.
- [3] J. Salmeron, R.K. Wood and R. Baldick: Analysis of electric grid security under terrorist threat. *IEEE Transactions on Power Systems* **19**, pp.905–912, 2004.
- [4] R.L. Church, M.P. Scaparra and R.S. Middleton: Identifying critical infrastructure: The median and covering facility interdiction problems, *Annals of the Association of American Geographers* **94**, pp.491–502, 2004.
- [5] M. Thomas and Y. Nisgav: An infiltration game with time dependent payoff, *Naval Research Logistics Quarterly* **23**, pp.297–302, 1976.
- [6] N. Assimakopoulos: A network interdiction model for hospital infection control, *Computers in Biology and Medicine* **17**, pp.413–422, 1987.
- [7] F. Perea and J. Puerto: Revisiting a game theoretic framework for the robust railway network design against intentional attacks, *European Journal of Operational Research* **226**, pp.286–292, 2013.
- [8] M. Bell, U. Kanturska, J. Schmöcker and A. Fonzone: Attacker-defender models and road network vulnerability, *Philosophical Transactions of the Royal Society* **366**, pp. 1893–1906, 2008.
- [9] R. Hohzaki and T. Chiba: An attrition game on an acyclic network. *Journal of the Operational Research Society* **66**, pp.979–992, 2015.
- [10] R. Hohzaki and K. Sunaga: Attrition game models with asymmetric information on a network. *Journal of the Operations Research Society of Japan* **59**, pp.195–217, 2016,
- [11] R. Hohzaki and T. Higashio: An attrition game on a network ruled by Lanchester’s square law. *Journal of the Operational Research Society* **67**, pp.691–707, 2016.
- [12] R. Horst P.M. Pardalos and N.V. Thoai: *Introduction to Global Optimization*, pp. 105–153, Kluwer Academic Publishers, London, 1995.